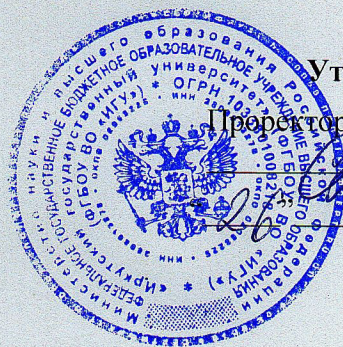




МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)



Утверждаю

Проректор по учебной работе
А.И. Вокин

2024 г.

ПРОГРАММА
вступительного испытания для поступающих на обучение по программам
подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Научная специальность: 1.1.6 Вычислительная математика

Иркутск 2024

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Раздел 1. Функциональный анализ

1.1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

1.2. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

1.3. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

1.4. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

1.5. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

1.6. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха—Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов).

1.7. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

1.8. Пространства функций C , L_2 , L_p , W_p^1 . Обобщенная производная.

1.9. Неравенства Пуанкаре—Стеклова—Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

Основная литература

1. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ОИЦ «Академия», 2012.
2. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2006.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009.

Дополнительная литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2002 – 320 с.
2. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов, «Наука», 1966.

Раздел 2. Задачи математической физики

2.1. Математические модели физических задач. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2.2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

2.3. Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

2.4. Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля.

Основная литература

1. Владимиров В.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики, М.: Наука, 1968.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1996.

4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: МГТУ им. Н.А. Баумана, 2006.

Дополнительная литература

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.

Раздел 3. Численные методы

3.1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

3.2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

3.3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

3.4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

3.5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

3.6. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

3.7. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток,

интегроинтерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

3.8. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

3.9. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

3.10. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Основная литература

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М., Изд-во «БИ-НОМ. Лаборатория знаний», 2011
2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2005.
3. Волков Е. А. Численные методы. - СПб.: Лань, 2004.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. - СПб.: Лань, 2009.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. - Изд.: Лань, 2009 г
Распопов В. Е., Клунникова М. М., Сапожников В. А. Численный анализ.- Красноярск, 2005.

Дополнительная литература

1. Березин И. С, Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.1. - М.: Физматгиз, 1966.

2. Калиткин Н. Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
3. Белоцерковский О.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.: Наука. 1985.
4. Уатт Дж., Холл Дж. (ред.) Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. —М.: Мир. - 312 с.
5. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. -М.: Мир, 1999. - 548 с.
6. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в Mathcad 12. - СПб.: Питер, 2006. - 544 с.
7. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984
8. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. - М.: Наука, 1977.
9. Ракитин В. П., Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с применением программ для персональных компьютеров. - М.: Высшая школа, 1998.
10. Дробышев В. И., Дымников В. П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. - М.: Наука, 1980.

Форма проведения вступительного испытания

Вступительные испытания проводятся в устной форме по билетам. Каждый билет включает три вопроса. На подготовку к ответу дается 90 минут. Результат сдачи поступающим вступительного испытания оценивается экзаменационной комиссией по пятибалльной шкале.

Перечень вопросов к вступительному экзамену

1. Приближенное вычисление функций с помощью рядов Тейлора.
2. Многочленная интерполяция функций в форме Лагранжа.
3. Многочленная интерполяция функций в форме Ньютона.
4. Кусочно-многочленная интерполяция функций.
5. Интерполяция периодических функций.
6. Применение полиномов Чебышева для многочленной интерполяции функций.
7. Формула трапеций для приближенного вычисления интегралов.
8. Формула Симпсона для приближенного вычисления интегралов.
9. Приближенное вычисление кратных интегралов.
10. Методы точного решения систем линейных алгебраических уравнений.
11. Методы простых итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений.
12. Обобщенное решение переопределенных систем.
13. Методы простых итераций для решения нелинейных алгебраических уравнений и их систем.

14. Метод линеаризации Ньютона для решения нелинейных алгебраических уравнений и их систем.
15. Метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
16. Метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка с постоянными коэффициентами.
17. Методы решения систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
18. Методы конечных разностей для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
19. Методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных.
20. Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.
21. Применение метода разделения переменных для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.
22. Применение разностных схем для численного решения уравнений второго порядка в частных производных.