МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Утверждаю
Проректор по учебной работе
_______ А.И. Вокин
"30" 03 2022 г.

ПРОГРАММА

вступительного испытания для поступающих на обучение по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Научная специальность: 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Иркутск 2022

1. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

1.1. Математическая логика

1. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
2. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
3. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи. Выполнимость.
4. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
5. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
6. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
7. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
8. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
9. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
10. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
11. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
12. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
13. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
14. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

1.2. Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
3. Свободные группы и определяющие соотношения.
4. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
5. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
6. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
7. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
8. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
9. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
10. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
11. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
12. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

1.3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.
2. Первообразные корни и индексы.
3. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
4. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
5. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
6. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
7. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
8. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
9. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.

1.4. Дискретная математика

1. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме.
2. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ ?Т (сумма тупиковых) с помощью локального алгоритма.
3. Невозможность построения ДНФ ?М (сумма минимальных) в классе локальных алгоритмов.
4. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта—Макмиллана.
5. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
6. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку.
7. Конечные поля и их основные свойства.
8. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.
9. Основные комбинаторные числа.
10. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
11. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов.
12. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина—Куратовского (без доказательства достаточности).
13. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.
14. Теорема Рамсея.

2. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

2.1. Основная литература

1. Ершов Ю.Л. Математическая логика. – СП. Лань, 2005. – 336 с.
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. – М.: Единориал УРСС, 2005. – 240 с.
3. Белоногов В.А. Задачник по теории групп. –М.: Наука, 2000.
4. Богопольский О.В. Ввведение в теорию групп, –М.: РХД, 2002
5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра, –М.: Лань, 2004.
6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. –М.: Лань, 2009.
7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. –М.: Мир, 1980

8. Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин М.М. Упражнения по теории групп. –М.: Наука, 1967.
9. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. –М.: Наука, 1974
10. Мельников О.В., Ремесленников В.Н. и др. Общая алгебра. –М.: Наука, 1990.
11. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высш. школа, 2008.
12. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. М.: Либроком, 2009.
13. Платонов М.Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. – М.: Наука, 1979. – 152 с.
14. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384с.

2.2. Дополнительная литература

1. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. –Минск: Высшая школа, 2006.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Книга 3: Основные структуры алгебры –М.: Наука, 2001.
2. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Босс В. Лекции по математике. Т.6 От Диофанта до Тьюринга: Учебное пособие. М.: КомКнига, 2005, 2006. – 208 с.
4. Кокорин А.И., Копытов В.М. Линейно упорядоченные группы. –М.: Наука, 1972.
5. Кокстер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. –М.: Наука, 1980.
6. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши. Идеалы, многообразия, алгоритмы. –М.: Мир, 2000.
7. Курош А.Г. Теория групп. –М.: Лань, 2005.
8. Нейман Х. Многообразия групп. –М.: Мир, 1969.
9. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 15-е, Новосибирск, ИМ СО РАН, 2002.
10. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. –М.: Наука, 1966.
11. Холл М. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962.
12. Холл Ф. Нильпотентные группы. Сб. переводов «Математика», 12, № 1 (1968), 3-36
13. Математические вопросы кибернетики. 1988—2001. Вып. 1—10. М.: Наука.

3. ФОРМА ПРОВЕДЕНИЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Вступительные испытания проводятся в устной или письменной форме по билетам. Билет содержит два вопроса. Во время проведения вступительных испытаний участникам указанных мероприятий и лицам, привлекаемым к их проведению, запрещается иметь при себе и использовать средства связи и компьютеры, калькуляторы, за исключением случаев, установленных нормативными правовыми актами Российской Федерации.

4. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПОСОВ

1. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
2. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
3. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи. Выполнимость.
4. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

5. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
6. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
7. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
8. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
9. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
10. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
11. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
12. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
13. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
14. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.
15. Теоремы Силова.
16. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
17. Свободные группы и определяющие соотношения.
18. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
19. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
20. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
21. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
22. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
23. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
24. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
25. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
26. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.
27. Квадратичный закон взаимности.
28. Первообразные корни и индексы.
29. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.
30. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
31. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
32. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
33. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
34. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
35. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
36. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме.

37. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ ?Т (сумма тупиковых) с помощью локального алгоритма.
38. Невозможность построения ДНФ ?М (сумма минимальных) в классе локальных алгоритмов.
39. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта—Макмиллана.
40. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
41. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку.
42. Конечные поля и их основные свойства.
43. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.
44. Основные комбинаторные числа.
45. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
46. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов.
47. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина—Куратовского (без доказательства достаточности).
48. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.
49. Теорема Рамсея.

Разработчик
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры
вычислительной математики и оптимизации
В. Г. Антоник